



به نام پروردگار مهربان



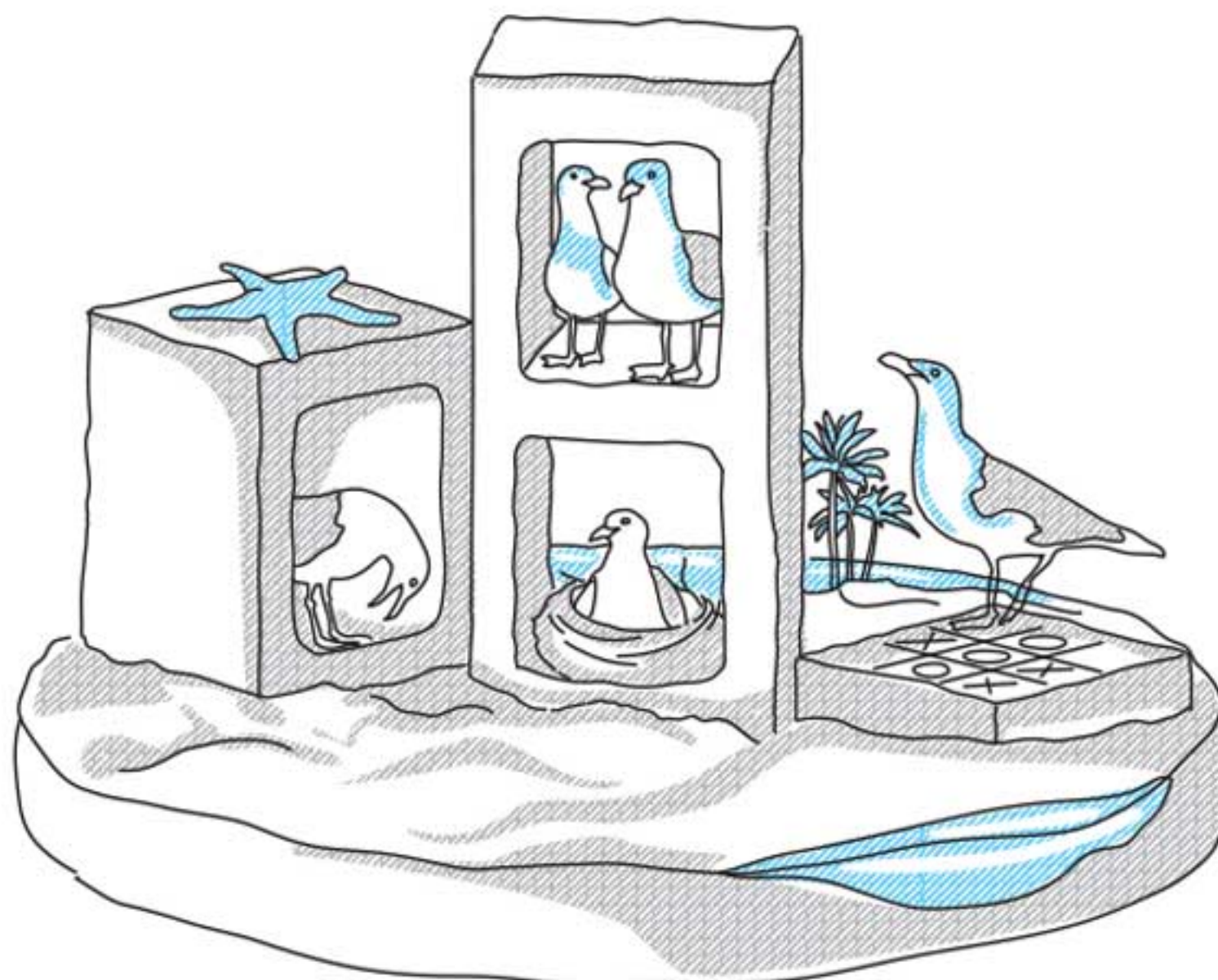
ویرایش جدید

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

جامع کنکور

• جواد ترکمن • علی سعیدی زاد • مسعود طایفه

ناظر علمی کتاب: پیروز آل بویه



برای مشاهده کنکورهای ۱۴۰۱
و سایر محتواهای تکمیلی
این QR code را اسکن کنید.



سرشناسه: ترکمن، جواد / عنوان و نام پدیدآور: ریاضیات گسسته و آمار و احتمال / مشخصات نشر: تهران: مهرماه نو، ۱۳۹۸ / مشخصات ظاهری: مصور، جنول، نمودار: ۲۹، ۲۲ س.م. / فروست: کتاب جامع / شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۳۷۰-۵ / وضعیت فهرست نویسی: فیبای مختصر / شناسه افزوده: سعیدی زاد، علی، طایفه، مسعود / شماره کتابشناسی ملی: ۵۴۷۵۰۰۵

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

ناشر: انتشارات مهرماه نو

مؤلفان: جواد ترکمن، علی سعیدی زاد، مسعود طایفه

استادان مشاور کتاب: حسین بسطام، سید مسعود طایفه، مهدی عبداللہی،

مجید محمدی، رضا مہربانی

مدیر شورای تألیف: محمد حسین انوشه

ناظر علمی کتاب: استاد پیروز آل بویه

مدیر گروه ریاضی: عباس اشرفی

مسئول ویراستاری: آزاده غنی فرد

ویراستاران علمی: مہرنوش رضوی، مهدی حساری، مهدی مرادی، وحید جعفری،

امیرحسین عباسی

نوبت چاپ: ششم، ۱۴۰۱

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۳۷۰-۵

قیمت: ۲۶۰۰۰۰ تومان

مدیر تولید: مریم تاجداری

مدیر هنری: محسن فرهادی

طراح گرافیک صفحات: تایماز کاویانی

طراح جلد: حسین شیرمحمدی

مدیر فنی: میلاد صفایی

صفحه آرا: رویا طبسی

رسم تصاویر: مریم صابری برون، خاطره بهاگیر

تصویرگران: حسام طلائی، الهام اسلامی

نشانی: تهران، میدان انقلاب، خیابان
۱۲ فروردین، کوچه مینا، پلاک ۳۴
دفتر مرکزی: ۶۶۴۰۸۴۰۰
سامانه پیامکی: ۲۰۰۰۸۴۸۴

www.mehromah.ir

© کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به انتشارات
مهرماه نو می باشد. هرگونه برداشت از مطالب این کتاب
بدون مجوز کتبی از ناشر، ممنوع بوده و پیگرد قانونی دارد.



مهرماه



مرکز تماس مهرماه

۰۲۱-۹۶۸۸۴



تقدیم به پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو در روز ۲۷ اسفند سال ۱۳۲۲ در روستای سمقاور از توابع کمیجان در استان مرکزی چشم به دنیا گشود. وی مدرک ششم ابتدایی خود را در سال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرستانی تا فاصله صد کیلومتری سمقاور وجود نداشت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشاورزی پرداخت. در سال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ التحصیل ممتاز از دبیرستانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سپس برای تحصیل در مقطع کارشناسی رشته ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسی در مؤسسه ریاضیات که توسط «پروفیسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شد. مؤسسه ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران است که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسیس شده بود. استاد جهانشاهلو دوره ۲۷ ماهه بسیار سنگین مؤسسه ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسانده و به عنوان فارغ التحصیل ممتاز در دانشسرای عالی (دانشگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شغل مقدس معلمی در دانشگاه مشغول شد. ایشان در سال ۱۳۵۱ برای ادامه تحصیل عازم انگلستان شد. ابتدا مدرک کارشناسی ارشد دیگری در رشته تحقیق در عملیات از دانشگاه ساوت همپتون دریافت نمود. سپس برای دوره دکتری در زمینه الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشگاه برونل رفت و در اردیبهشت سال ۱۳۵۵ از رساله خود دفاع کرد و به ایران بازگشت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبه استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ حاصل زندگی وی چاپ بیست و دو جلد کتاب و چاپ بیش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشجوی کارشناسی ارشد و بیش از هزار دبیر ریاضی است. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششی داده‌های ایران» همچون پدری دلسوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشن‌گر راه کسانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مجموعه - زیر مجموعه

مجموعه

مجموعه، دسته‌ای از اشیای دلخواه است که بدون هیچ ابهامی بتوان معلوم کرد که یک شیء معین در آن قرار دارد یا نه.

تست: کدام یک از گزاره‌های زیر بیانگر یک مجموعه نیست؟

- (۱) دسته اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از عدد ۲۰
 (۲) دسته اعداد اول یک رقمی
 (۳) دسته‌ای شامل اعداد بزرگ
 (۴) دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگ‌تر از عدد ۵۰
- پاسخ (گزینه ۳) بررسی گزینه‌ها:

در مورد گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به ترتیب مجموعه‌های $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ ، $\{2, 3, 5, 7\}$ و $\{64, 81, 100, 121, \dots\}$ قابل قبول هستند، زیرا در مورد هر عددی می‌توان تشخیص داد که متعلق به هریک از این سه مجموعه است یا نه، اما در مورد گزینه «۳»، نمی‌توان در مورد عضوهای این مجموعه تصمیم قابل قبولی گرفت. مثلاً در مورد عدد ۱۰۰۰ دقیق نمی‌توان تعیین کرد که در این دسته قرار دارد یا خیر.

هشدار: مجموعه همواره فاقد ترتیب و تکرار است.

برای نمونه: مجموعه‌های $\{a, b, c\}$ ، $\{c, a, b\}$ ، $\{a, b, b, c\}$ و $\{a, a, a, b, c\}$ همگی یکسان‌اند.

تذکره: ۱) اشیائی که با هم مجموعه را تشکیل می‌دهند، عضو یا عنصرهای آن مجموعه نامیده می‌شوند.

۲) اگر A یک مجموعه باشد، در صورتی که عضوی مانند x در مجموعه A وجود داشته باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و در صورتی که x متعلق به مجموعه A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$. بنابراین نماد \in ، به معنای عضویت است.

تست: اگر $A = \{a, \{a\}, \{\{b\}\}\}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\{a\} \in A$
 (۲) $a \in A$
 (۳) $\{b\} \in A$
 (۴) $\{\{b\}\} \in A$
- پاسخ (گزینه ۳) زیرا در مجموعه A عضوی به شکل $\{b\}$ وجود ندارد.

۲) در هر بحث معین، عناصری مورد بررسی قرار می‌گیرند که همه آن‌ها اعضای یک مجموعه به نام مجموعه مرجع (عام، جهانی) هستند. مجموعه مرجع را با حرف U نشان می‌دهیم.



۴) مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نام دارد و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش داده می‌شود. پس $\emptyset = \{\}$.

۵) برای مشخص کردن یک مجموعه دو روش وجود دارد:

الف) نام بردن (قهرست کردن) عضوهای مجموعه B معرفی خاصیت مشترک عضوهای مجموعه به زبان ریاضی (گزاره‌نما) توجه کنید که در روش دوم، باید مجموعه مرجع معین شود.

۶) برای ایجاد یک درک شهودی از نظریه مجموعه‌ها، از یک نمودار هندسی به نام نمودار ون استفاده می‌کنیم. معمولاً مجموعه مرجع را با مستطیل و سایر مجموعه‌های داخل مجموعه مرجع را با دایره یا بیضی نمایش می‌دهیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

تست: کدام یک از مجموعه‌های زیر، کمتر از ۴ عضو دارند؟

- الف) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$
 ب) $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\}$
 پ) $C = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 1 = 0\}$
 ت) $D = \{a \in S \mid \text{فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است}\}$
 ث) $E = \{x^2 \times y^2 \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\}$
 ج) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 6 = 0) \wedge (x^2 \geq 5)\}$
 چ) $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 12x + 25 = 0) \vee (x^2 \leq 10)\}$
 ح) $H = \{\frac{x^2 + 4}{2x + 2} \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$
- (۱) F, G, D, B (۲) H, F, C, B (۳) F, H, G, A (۴) A, F, D, B

پاسخ (گزینه ۲) الف) می‌دانیم $|x| \leq 2$ نتیجه می‌دهد که $-2 \leq x \leq 2$. پس عضوهای مجموعه A اعداد صحیح متعلق به بازه به دست آمده هستند

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$m^2 = m \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m \cdot (m^2 - 1) \Rightarrow m = 0, \pm 1 \Rightarrow B = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{-1, 1\}$$

پ) پس از حل معادله $k^2 - 1 = 0$ داریم:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(ت) با توجه به مبحث احتمال داریم:

(ث) ابتدا جفت اعداد طبیعی x و y را می‌یابیم که در $x+y=5$ صدق کنند.

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow E = \{2^1 \times 3^4, 2^2 \times 3^3, 2^3 \times 3^2, 2^4 \times 3^1\} = \{162, 108, 72, 24\}$$

(ج) از حل معادله درجه دوم $x^2 - 5x + 6 = 0$ درمی‌یابیم که $x=2$ یا $x=3$ قابل قبول است که فقط $x=2$ در گزاره $x^2 \geq 5$ صدق می‌کند. پس $F = \{2\}$. (با توجه به ترکیب عطفی x ای قابل قبول است که در هر دو گزاره صدق کند.)

$$x^2 - 12x + 35 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-5) \cdot (x-7) = 0 \Rightarrow (x=5) \vee (x=7)$$

(چ)

$$x^2 \leq 10 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \leq \sqrt{10} \Rightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$$

اما $\sqrt{10} \approx 3.16$ و در نتیجه اعداد صحیح متعلق به بازه به دست آمده عبارت‌اند: از $2, 1, 0, -1, -2, -3$ بنابراین:

$$G = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$$

(ح) برای یافتن عضوهای مجموعه H ، x را برابر اعداد $1, 2, 3, 4$ قرار می‌دهیم و حاصل عبارت $\frac{x^2+4}{2x+2}$ را می‌یابیم و در صورت صحیح بودن

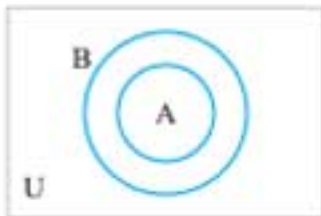
$$x=1 \Rightarrow \frac{1^2+4}{2(1)+2} = 1 \in \mathbb{Z}, \quad x=2 \Rightarrow \frac{2^2+4}{2(2)+2} = \frac{12}{11} \notin \mathbb{Z}$$

قبول می‌کنیم:

$$x=3 \Rightarrow \frac{3^2+4}{2(3)+2} = 1 \in \mathbb{Z}, \quad x=4 \Rightarrow \frac{4^2+4}{2(4)+2} = \frac{20}{14} \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین $H = \{1\}$. پس مجموعه‌های H, F, C, B کمتر از 4 عضو دارند.

زیرمجموعه



مجموعه A را یک زیرمجموعه از مجموعه B می‌نامیم اگر و تنها اگر هر عضو A ، عضوی از B باشد، در این صورت می‌نویسیم $A \subseteq B$. پس:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

• چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو متعلق به مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$. پس:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

(توجه کنید که از نقیض سور عمومی و نقیض گزاره شرطی استفاده شده است.)

📌 **تست:** مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$$A = \{x \mid \text{یک چهارضلعی است}\}$$

$$C = \{x \mid \text{یک لوزی است}\}$$

$$B = \{x \mid \text{یک مستطیل است}\}$$

$$D = \{x \mid \text{یک مربع است}\}$$

$$D \subseteq A \quad (۴)$$

$$D \subseteq B \quad (۳)$$

$$A \subseteq B \quad (۲)$$

$$D \subseteq C \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست است. از آنجایی که «هر مربع، یک لوزی است»، پس $D \subseteq C$.

گزینه ۲: نادرست است. چون «هر چهار ضلعی، لزوماً مستطیل نیست»، پس $A \not\subseteq B$.

گزینه ۳: درست است، می‌دانیم «هر مربع، مستطیل است»، پس $D \subseteq B$.

گزینه ۴: درست است. واضح است که «هر مربع یک چهار ضلعی است»، پس $D \subseteq A$.

📌 فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، $D = \{3, 4, 5\}$ و $E = \{3, 5\}$ باشند. در کدام حالت مجموعه X وجود ندارد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$$(۲) X \subseteq A \text{ ولی } X \not\subseteq C$$

(۱) X و B عضو مشترکی ندارند.

$$(۴) X \subseteq A \text{ ولی } X \not\subseteq C$$

$$(۳) X \subseteq D \text{ ولی } X \not\subseteq B$$

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: $X = C$ یا $X = E$ قابل قبول است.

گزینه ۲: $X = B$ یا $X = D$ ، زیرا $B \subseteq A$ ولی $B \not\subseteq C$ و در مورد $X = D$ نیز $D \subseteq A$ ولی $D \not\subseteq C$.

گزینه ۳: $X = E$ ، زیرا $E \subseteq D$ (تمام عضوهای E در D هستند)، ولی $E \not\subseteq B$ (زیرا مثلاً $3 \in E$ ، در صورتی که $3 \notin B$).

گزینه ۴: چنین X ای وجود ندارد، زیرا تمام عضوهای C در A هستند.

نکته: \in یا \subseteq مسئله این است:

خود دایره، در مربع دیده می‌شود $\square \ni \bigcirc$
 تمام عضوهای دایره، در مربع دیده می‌شود $\square \supseteq \bigcirc$

تست ۱: اگر $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ و $C = \{a, b, \{b\}, \{a, b\}\}$ باشند، کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $A \in B$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in C$ (۴) $B \in C$

پاسخ (گزینه ۴): واضح است که در مجموعه C ، عضوی به صورت $\{a, b, \{a, b\}\}$ دیده نمی‌شود. به عبارت دیگر خود B در C نیست. پس $B \in C$. اما چون تمام عضوهای B در C دیده می‌شوند، پس $B \subseteq C$. در مورد سایر گزینه‌ها، چون خود A در B و C دیده می‌شود، پس $A \in B$ و $A \in C$ و چون تمام عضوهای A در B دیده می‌شوند، بنابراین $A \subseteq B$ و به همین ترتیب $A \subseteq C$ نیز درست است.

تست ۱: کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (۲) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
 (۳) $\emptyset = \{\emptyset\}$ (۴) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

پاسخ (گزینه ۳): بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: می‌دانیم \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است. به عبارت دیگر $\emptyset \subseteq \square$ ، پس **گزینه ۱**، یک گزاره درست است.
گزینه ۲: واضح است که خود \emptyset در $\{\emptyset\}$ دیده می‌شود، پس $\emptyset \in \{\emptyset\}$ و گزاره‌ای درست است.
گزینه ۳: واضح است که $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تهی نیست. مجموعه‌ای شامل نماد \emptyset است، پس گزاره $\emptyset = \{\emptyset\}$ نادرست است.
گزینه ۴: خود $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در مجموعه $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$ دیده می‌شود، پس گزاره‌ای درست است.

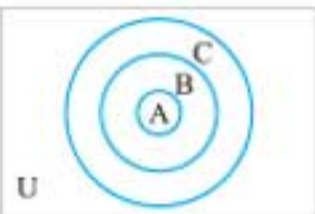
ویژگی‌های زیرمجموعه

$A \subseteq A$

ویژگی ۱: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است. یعنی اگر A یک مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U باشد. آن‌گاه:

$\emptyset \subseteq A$

ویژگی ۲: مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است. یعنی اگر A یک مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U باشد. آن‌گاه:



ویژگی ۳: برای سه مجموعه دلخواه A, B, C با مرجع U داریم:

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (خاصیت تعدی)

دو مجموعه مساوی

دو مجموعه A و B با مرجع U مساوی‌اند اگر و تنها اگر هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر:

$A = B \Leftrightarrow [\forall x; (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$

$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

بنابراین برای آن که نشان دهیم دو مجموعه برابرند، باید ثابت کنیم که هریک، زیرمجموعه دیگری است.

تست ۱: با توجه به مجموعه‌های زیر، کدام تساوی درست است؟

$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$

$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}$ ، $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$

$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 2m^2\}$

$D = C$ و $A = B = E$ (۲)

$D = E$ و $A = B = C$ (۱)

$A = E$ و $B = C = D$ (۴)

$E = C$ و $B = D = A$ (۳)

پاسخ (گزینه ۳): کافی است عضوهای هریک از مجموعه‌ها را به صورت فهرستی بنویسیم. داریم:

$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 < m < 2\} = \{-1, 0, 1\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x = 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x(x-1) = 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x=0) \vee (x^2-1=0)\} = \{0, -1, 1\}$

$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 - 2y \leq 0\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y(y-2) \leq 0\} = \{0, 1, 2\}$

$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq 1\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$

$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 - 2m^2 + 2m = 0\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid m(m^2 - 2m + 2) = 0\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid m(m-1)(m-2) = 0\} = \{0, 1, 2\}$

مبانی احتمال

پدیده تصادفی

هر پدیده‌ای که قبل از رخ دادن، نتیجه آن را نتوان مشخص کرد، پدیده تصادفی نامیده می‌شود. مانند پرتاب یک سکه، ریختن یک تاس و ... واضح است که در پرتاب یک سکه، نمی‌توان مشخص کرد که نتیجه «رو» یا «پشت» است و یا در ریختن یک تاس نمی‌توان دقیق اعلام کرد که کدام عدد ظاهر می‌شود.

فضای نمونه (S)

مجموعه تمام نتایج ممکن از انجام یک پدیده تصادفی را فضای نمونه می‌گویند.

- فضای نمونه را با حرف S نشان می‌دهند. هر عضو فضای نمونه، یک «برآمد» نامیده می‌شود.
 - اعضای فضای نمونه، مشخص می‌کنند که نتیجه آزمایش یا پدیده‌ای که در حال بررسی آن هستیم، چه حالت‌هایی دارد.
 - از آنجایی که فضای نمونه، یک مجموعه است، پس به دو روش زیر می‌توان آن را مشخص کرد:
- الف) نام بردن (فهرست کردن) برآمدها (ب) معرفی خاصیت مشترک برآمدها به زبان ریاضی (گزاره‌نما)**

مثال: در مورد هر یک از پدیده‌های زیر فضای نمونه را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه (ب) خانواده تک فرزندی (پ) ریختن یک تاس

ت) خارج کردن یک لامپ به تصادف از جعبه‌ای شامل پنج لامپ به شماره‌های ۱ تا ۵

الف) اگر «رو» و «پشت» سکه را به ترتیب با «ر» و «پ» نشان دهیم، آن‌گاه فضای نمونه عبارت است از:

ب) فرزند یک خانواده «دختر» یا «پسر» است که به ترتیب با «د» و «پ» نشان می‌دهیم. پس:

پ) در آزمایش ریختن یک تاس فقط ممکن است اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شود. پس:

ت) واضح است که اگر لامپ‌های داخل جعبه را به صورت L_1, L_2, \dots, L_5 نمایش دهیم، آن‌گاه:

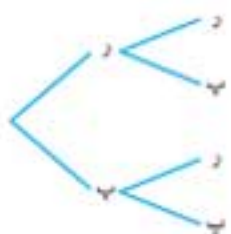
مثال: فضای نمونه‌ای هر یک از پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

الف) پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) (ب) پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)

الف) لازم به ذکر است که در آزمایش پرتاب دو سکه با هم، فرض می‌کنیم هر دو سکه متمایزند (به عنوان مثال یک سکه آبی و دیگری قرمز است)، بنابراین فضای نمونه‌ای به کمک نمودار درختی عبارت است از:

$$S = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$$

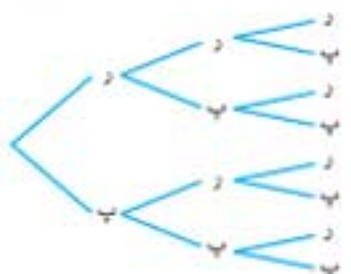
سکه قرمز (پرتاب دوم) سکه آبی (پرتاب اول)



دقت کنید که حالت (ر, پ) با حالت (پ, ر) فرق دارد. در حالت (پ, ر)، سکه آبی (پرتاب اول) «ر» و سکه قرمز (پرتاب دوم) «پ» آمده و در حالت (ر, پ)، سکه آبی (پرتاب اول) «پ» و سکه قرمز (پرتاب دوم) «ر» آمده است.

(ب)

سکه سوم سکه دوم سکه اول



$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

نتیجه: ۱ اگر S فضای نمونه‌ای یک بار انجام یک پدیده تصادفی باشد، فضای نمونه‌ای دوبار تکرار آن $S \times S$ است. پس عضوهای فضای نمونه (برآمدها) به صورت زوج مرتب هستند.

۲ اگر S فضای نمونه‌ای یک بار انجام یک پدیده تصادفی باشد، فضای نمونه‌ای سه بار تکرار آن، $S \times S \times S$ است. پس عضوهای فضای نمونه (برآمدها) به صورت سه تایی مرتب هستند.

۳ در تعمیم نتیجه ۲ می‌توان گفت فضای نمونه‌ای n بار تکرار یک آزمایش تصادفی، $S \times S \times \dots \times S$ است و هر عضو (برآمد) یک n تایی مرتب است.

۴ اگر فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی، در یک بار انجام دارای x برآمد باشد، در n بار تکرار آن، x^n برآمد حاصل می‌شود.

پس همان‌طور که ملاحظه شد، فضای نمونه‌ای:

- پرتاب یک سکه دارای ۲ برآمد است.
 - پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) دارای $2^2 = 4$ برآمد است.
 - پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه) دارای $2^3 = 8$ برآمد است.
- بنابراین به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت:

تعداد برآمدهای فضای نمونه	پدیده تصادفی
2^n	پرتاب n سکه با هم (n بار پرتاب یک سکه)
2^n	یک خانواده n قرزند
2^n	پرتاب n تاس با هم (n بار پرتاب یک تاس)

- در تمامی پدیده‌های بالا، سکه‌ها و تاس‌ها متمایز فرض می‌شوند. (آبی، قرمز، ...)

تست: فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس با هم (دو بار پرتاب یک تاس) چند برآمد دارد؟

۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۶۴ (۴)

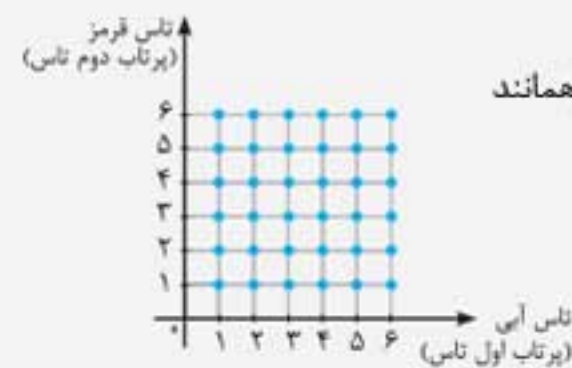
پاسخ (گزینه ۳) می‌دانیم فضای نمونه در یک بار پرتاب یک تاس $\{1, 2, \dots, 6\}$ است. پس فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس با هم (دو بار پرتاب یک تاس) عبارت است از:

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

که دارای $6^2 = 36$ برآمد است.

- لازم به ذکر است که دو تاس را متمایز فرض می‌کنیم (مثلاً تاس قرمز و تاس آبی). بنابراین برآمد $(1, 2)$ با برآمد $(2, 1)$ متفاوت است. در اولی، تاس قرمز (پرتاب اول تاس) عدد ۱ و تاس آبی (پرتاب دوم تاس) عدد ۲ آمده است و در دومی نتایج عوض شده است. یعنی تاس قرمز (پرتاب اول تاس) عدد ۲ و تاس آبی (پرتاب دوم تاس) عدد ۱ آمده است.

- فضای نمونه را در آزمایش بالا می‌توان به زبان ریاضی (جبر مجموعه‌ها) به صورت مقابل نمایش داد:



- فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی (و آزمایش‌های مشابه آن) را می‌توان با دو محور عمود بر هم (همانند نمایش ضرب دکارتی مجموعه‌ها) به صورت مقابل (به کمک نقطه‌یابی) نشان داد:

تست: در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج معیار زیر مشخص می‌شود. این فضای نمونه چند برآمد دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۵ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۱۶ (۴)

- دمای هوا: سرد یا گرم
- سرعت باد: باد می‌وزد یا باد نمی‌وزد
- مقدار بارش: بارندگی یا عدم بارندگی
- رطوبت هوا: خشک یا مرطوب
- وضعیت هوا: صاف، نیمه ابری یا ابری

پاسخ (گزینه ۳) اگر پنج موضوع گفته شده را با پنج مجموعه زیر نشان دهیم:

$$S_1 = \{\text{سرد, گرم}\}$$

$$S_2 = \{\text{مرطوب, خشک}\}$$

$$S_3 = \{\text{باد می‌وزد, باد نمی‌وزد}\}$$

$$S_4 = \{\text{ابر, نیمه ابری, صاف}\}$$

$$S_5 = \{\text{عدم بارندگی, بارندگی}\}$$

فضای نمونه عبارت است از: $S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \times S_5$ ، که هر برآمد آن یک پنج‌تایی مرتب به صورت زیر است:

$$(a, b, c, d, e)$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 s_1 از s_2 از s_3 از s_4 از s_5

مثلاً یک برآمد به صورت (عدم بارندگی، صاف، باد نمی‌وزد، خشک، گرم) است.

فضای نمونه دارای $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$ برآمد است.

تست: یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند (اما خالی حرکت نمی‌کند). در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه در توصیف این پدیده تصادفی، برای یک بار رفت و برگشت چند برآمد دارد؟

۱۶ (۱) ۲۵ (۲) ۲۰ (۳) ۸ (۴)

پاسخ (گزینه ۱) با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و برگشت عددی بین ۱ تا ۴ است، پس:

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(S) = 4 \times 4 = 16$$

توجه کنید که برآمدهای موجود در S به صورت زوج مرتب هستند و مثلاً زوج مرتب $(1, 2)$ بیان‌گر آن است که تاکسی در مسیر رفت با ۱ مسافر و در مسیر برگشت با ۲ مسافر حرکت کرده است.



توجه: کیسه‌ای شامل n مهره متمایز است. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. می‌خواهیم بررسی کنیم که در هر یک از حالت‌های زیر فضای نمونه دارای چند برآمد است:

الف) دو مهره را با هم (هم‌زمان) بیرون می‌آوریم. **ب)** دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

پ) دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

الف) اگر دو مهره را به‌صورت «با هم» یا «هم‌زمان» از کیسه خارج کنیم، ترتیب ندارند و عمل انتخاب دو مهره از n مهره متمایز صورت می‌پذیرد و در نتیجه $n(S) = \binom{n}{2}$ است.

ب) خارج کردن مهره‌ها به‌صورت پی‌درپی (متوالی، یکی یکی)، یعنی ترتیب دارند. از طرفی چون این عمل بدون جای‌گذاری صورت می‌پذیرد، پس در بار اول یک مهره از n مهره و در بار دوم یک مهره از $n-1$ مهره باقی مانده انتخاب می‌شود. پس:

$$n(S) = \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{1}$$

\downarrow مهره اول \downarrow مهره دوم

پ) همانند قسمت «ب»، با این تفاوت که مهره اول پس از مشاهده به کیسه برگردانده می‌شود و مهره دوم باز از n مهره داخل کیسه انتخاب می‌گردد و امکان تکرار هست. پس:

$$n(S) = \binom{n}{1} \times \binom{n}{1}$$

پیشامد

پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است.

- پیشامد بخشی از فضای نمونه است که مطلوب مسئله است.
- اگر تنها یک عضو از پیشامدی رخ بدهد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.
- اگر فضای نمونه حاصل از انجام یک پدیده تصادفی دارای n برآمد باشد، آن‌گاه 2^n پیشامد می‌توان برای آن پدیده تصادفی مشخص کرد.
- هر پیشامد تک‌عضوی را یک پیشامد ساده می‌نامند.

مثال: در آزمایش پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد زوج ظاهر شود. **ب)** عدد اول ظاهر شود.

می‌دانیم در آزمایش پرتاب یک تاس فضای نمونه دارای ۶ برآمد است. اما پیشامدهای موردنظر بخشی از این فضای نمونه هستند.

الف) $A = \{2, 4, 6\}$ **ب)** $B = \{2, 3, 5\}$

تست: جعبه‌ای شامل ۱۵ عدد لامپ به شماره‌های ۱ تا ۱۵ است. لامپی به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. پیشامد A ، که در آن «عدد روی

لامپ یک عدد اول باشد» چند عضو دارد؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ **گزینه ۳** اعداد اول بین ۱ تا ۱۵ عبارت‌اند از: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

تست: در آزمایش پرتاب دو تاس با هم، کدام یک از پیشامدهای زیر بیشترین برآمد را دارد؟

پیشامد A : «مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ است»

پیشامد B : «هر دو عدد ظاهر شده یکسان هستند»

پیشامد C : «مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است»

۱ (A) ۲ (B) ۳ (C) ۴ (هر سه مساوی‌اند)

$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

(توجه کنید برآمد $(2, 6)$ با برآمد $(6, 2)$ قرقر دارد، زیرا دو تاس متمایزند.)

می‌دانیم مجموع دو عدد ظاهر شده از دو تاس، عددی بین ۲ تا ۱۲ است. اما پیشامد موردنظر، تمام برآمدهایی است که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ هستند. پس:

$C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$

مجموع ۲ مجموع ۳ مجموع ۵ مجموع ۷ مجموع ۱۱

$$a|b \xrightarrow{m \leq n} a^m|b^n$$

نتیجه: اگر $a \neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

(به عبارت دیگر دو طرف نماد بخش پذیری را به توان‌های مختلف طبیعی می‌توان رساند، به شرط آن که توان مورد نظر برای سمت راست بزرگ‌تر از توان مورد نظر برای سمت چپ باشد.)

$$a|b \xrightarrow[\text{(ویژگی ۹)}]{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow[\forall m \in \mathbb{Z}]{\text{ویژگی ۸}} a^m|kb^m \xrightarrow[\text{(n} \geq \text{m)}]{k=b^{n-m}} a^m|b^{n-m} \times b^m \Rightarrow a^m|b^n$$

برای نمونه: (نادرست) $3|6 \Rightarrow 3^3|6^2$ ، (درست) $3|6 \Rightarrow 3^3|6^4$

حالت خاص: برای هر عدد صحیح a داریم: $\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m|a^n$

برای نمونه: $3^4|3^9$

(ب) اگر $a^2|b^2$ ، آیا $a|b$ ؟

مثال الف: اگر $a|b$ ، آیا $a^2|b^2$ ؟

الف) خیر، به مثال نقض روبه‌رو توجه کنید:

$$3|6 \Rightarrow 3^2|6^2$$

$$a^2|b^2 \xrightarrow[\forall m \in \mathbb{Z}]{\text{ویژگی ۸}} a^2|mb^2 \xrightarrow{m=b} a^2|b^3 \xrightarrow[\text{ویژگی ۹}]{\text{توان } 1} a|b$$

(ب) بله، زیرا:

$$a^m|b^n \xrightarrow{m \geq n} a|b$$

نتیجه: اگر $a \neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

به عبارت دیگر از دو طرف نماد بخش‌پذیری، توان‌های مختلف طبیعی را می‌توان برداشت به شرط آن که توان سمت چپ، بزرگ‌تر از توان سمت راست باشد.

برای نمونه: (نادرست) $4^2|2^6 \Rightarrow 4|2$ ، (درست) $2^7|8^3 \Rightarrow 2|8$

تست: اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ و c سه عدد صحیح باشند و $a^2|b$ و $2b|c^2$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

- (۱) $a|c$
- (۲) $a^2|c$
- (۳) $b|c$
- (۴) $c|a$

پاسخ (گزینه ۱) با توجه به فرض داده شده، داریم:

از طرفی طبق فرض مسئله، $2b|c^2$. پس به کمک ویژگی ۷ (خاصیت تعدی بخش‌پذیری) داریم:

$$a^2|b \xrightarrow[\text{(ویژگی ۸)}]{\forall m \in \mathbb{Z}} a^2|mb \xrightarrow{m=2} a^2|2b$$

$$(a^2|2b \wedge 2b|c^2) \Rightarrow a^2|c^2 \Rightarrow a|c$$

تست: اگر $a \neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه کدام گزاره شرطی همواره درست است؟

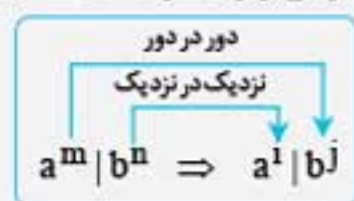
- (۱) $a^2|b^2 \Rightarrow a^4|b^3$
- (۲) $a^2|b^3 \Rightarrow a|b$
- (۳) $a^4|b^3 \Rightarrow a^2|b^2$
- (۴) $a|b \Rightarrow a^2|b^2$

پاسخ (گزینه ۱) در گزینه «۱» طبق تعریف بخش‌پذیری داریم:

$$a^2|b^2 \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b^2 = a^2 \cdot q \xrightarrow{\text{توان } 2} (b^2)^2 = (a^2 \cdot q)^2 \Rightarrow b^4 = a^4 \cdot q^2 \Rightarrow b^4 = a^4 \cdot (a \cdot q^2) \Rightarrow a^4|b^4 \Rightarrow a^2|b^2$$

بنابراین گزینه «۱» یک گزاره شرطی همیشه درست است و در مورد سایر گزینه‌ها، مثال نقض وجود دارد.

راهبرد: برای دو عدد صحیح $a \neq 0$ و b و اعداد طبیعی n, m, i و j ، گزاره شرطی زیر با شرط $m_j - n_i \geq 0$ همیشه درست است.



$$0 \leq (\text{نزدیک در نزدیک}) - (\text{دور در دور})$$

بنابراین گزینه «۱» همیشه درست است، زیرا $0 \leq (2)(2) - (2)(4)$ ، اما مثلاً گزینه «۳» همواره درست نیست، زیرا $0 \leq (4)(2) - (2)(2)$.

تست: اگر $a \neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست نیست؟

- (۱) $a^2|b^3$
- (۲) $a^5|b^3$
- (۳) $a^8|b^5$
- (۴) $a^6|b^2$

پاسخ (گزینه ۴) بررسی گزینه‌ها: طبق راهبرد گفته‌شده، در سؤال قبل داریم:

گزینه «۱»: $a^2|b^3 \Rightarrow a^2|b^3$ این گزاره شرطی همیشه درست است. زیرا:

گزینه «۲»: $a^5|b^3 \Rightarrow a^5|b^3$ این گزاره شرطی نیز همیشه درست است، زیرا:

گزینه «۳»: $a^8|b^5 \Rightarrow a^8|b^5$ این گزاره شرطی همواره درست است، زیرا:

گزینه «۴»: $a^6|b^2 \Rightarrow a^6|b^2$ این گزاره شرطی همیشه درست نیست، زیرا:

$$0 \leq (2)(2) - (4)(2)$$

$$0 \leq (2)(2) - (4)(5)$$

$$0 \leq (2)(5) - (4)(8)$$

$$0 \leq (2)(2) - (4)(4)$$

ویژگی ۱۰: اگر عددی بر حاصل ضرب چند عدد صحیح غیر صفر بخش پذیر باشد، آن گاه بر هر کدام از آن‌ها نیز بخش پذیر است.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, \dots$ و b داریم:

$$(a_1 a_2 a_3 \dots) | b \Rightarrow (a_1 | b \wedge a_2 | b \wedge a_3 | b \wedge \dots)$$

$$(a_1 a_2 a_3 \dots) | b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = (a_1 a_2 a_3 \dots) \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{(a_2 a_3 \dots q)}_{q' \in \mathbb{Z}} \Rightarrow b = a_1 \cdot q' \Rightarrow a_1 | b$$

(به همین ترتیب $a_2 | b, a_3 | b, \dots$)

نتیجه: طبق ویژگی ۱۰ درمی یابیم که لاغر، لاغرتر می شود.

برای نمونه:

$$(2 \times 3 \times 4) | 48 \Rightarrow (2 | 48 \wedge 3 | 48 \wedge 4 | 48)$$

$$a^n | b \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} a | b$$

حالت خاص برای دو عدد صحیح $a \neq 0$ و b داریم:

(کافی است در ویژگی ۱۰، قرار دهیم $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a$)

هشدار: عکس ویژگی ۱۰ همواره درست نیست. به عبارت دیگر اگر عددی بر چند عدد صحیح بخش پذیر باشد، ممکن است بر ضرب آن‌ها بخش پذیر نباشد.

پس در حالت کلی اگر $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, \dots$ و n اعدادی صحیح باشند،

به عبارت دیگر، لاغر، چاق نمی شود. به عنوان مثال می دانیم $4 | 12$ و $6 | 12$ ، اما $4 \times 6 \nmid 12$

حالت خاص اگر عددی بر چند عدد صحیح که دو به دو نسبت به هم اول اند (یعنی با هم عامل مشترکی به جز عدد ۱ ندارند)، بخش پذیر باشد، آن گاه بر حاصل ضرب آن‌ها نیز بخش پذیر است.

برای نمونه: می دانیم $3 | 24$ و $4 | 24$ و چون ۳ و ۴ نسبت به هم اول اند (هیچ عامل مشترکی غیر از عدد ۱ ندارند)، پس $3 \times 4 | 24$ و این نتیجه گیری همواره درست است، اما $6 | 24$ و $8 | 24$ و چون دو عدد ۶ و ۸ نسبت به هم اول نیستند (زیرا عامل مشترک غیر از عدد ۱ دارند، که آن عامل مشترک عدد ۲ است)، پس $6 \times 8 \nmid 24$.

تست: اگر $a^n | 150$ باشد، آن گاه عدد صحیح a بر کدام عدد همواره بخش پذیر است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- ۳۰ (۱) ۵۰ (۲) ۲۵ (۳) ۴۰ (۴)

پاسخ **گزینه ۱** می دانیم $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ ، پس طبق فرض داده شده، $a^n | 2 \times 3 \times 5^2$. به کمک ویژگی ۱۰ (لاغر، لاغرتر می شود)، درمی یابیم که:

$$2 | a^n, 3 | a^n, 5^2 | a^n \Rightarrow 5 | a^n$$

از طرفی طبق حالت خاص ۲ در ویژگی ۸، چون ۲، ۳ و ۵ اعدادی اول می باشند، پس:

$$2 | a^n \Rightarrow 2 | a, 3 | a^n \Rightarrow 3 | a, 5 | a^n \Rightarrow 5 | a$$

اما چون ۲، ۳ و ۵ دو به دو نسبت به هم اول اند (چرا؟)، پس طبق حالت خاص عکس ویژگی ۱۰، می توان نتیجه گرفت $2 \times 3 \times 5 | a$ لذا $30 | a$

ویژگی ۱۱: دو طرف دو یا چند بخش پذیری را می توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

به عبارت دیگر اگر $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ و d چهار عدد صحیح باشند، داریم:

$$\begin{cases} a | b \\ c | d \end{cases} \Rightarrow ac | bd$$

$$\begin{cases} a | b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = a \cdot q \\ c | d \xrightarrow{\exists q' \in \mathbb{Z}} d = c \cdot q' \end{cases} \xrightarrow{\times} bd = aqcq' \Rightarrow bd = (ac)(qq') \Rightarrow bd = (ac) \cdot q'' \Rightarrow ac | bd$$

برای نمونه: $\begin{cases} 3 | 6 \\ 4 | 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \times 4 | 6 \times 8 \\ 12 | 48 \end{cases}$

هشدار: عکس گزاره شرطی ویژگی ۱۱، همواره درست نیست. به عبارت دیگر:

به مثال نقض زیر توجه کنید:

می دانیم که $6 | 18$ و $4 | 12$ ولی همان طور که ملاحظه می شود $4 | 6$ و $9 | 12$ یا $4 | 30$ و $9 | 30$ و $4 \nmid 36$ و $9 \nmid 36$.

تست: اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $4 | a$ و $6 | b$ باشند، آن گاه کدام نتیجه گیری همواره درست است؟

- ۱۰ | $a + b$ (۱) ۸ | $2ab$ (۲) ۴۰ | $a^2 + b^2$ (۳) ۳۶ | $3ab$ (۴)

پاسخ **گزینه ۴** مطابق با ویژگی ۱۱، دو طرف دو رابطه بخش پذیری داده شده را می توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد. پس:

$$(6 | a \wedge 4 | b) \Rightarrow 6 \times 4 | ab \Rightarrow 24 | ab$$

حال به کمک ویژگی ۱۰، داریم:

$$24 | ab \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر می شود}} (2 | ab \wedge 12 | ab)$$

و در آخر با ضرب دو طرف رابطه بخش پذیری به دست آمده در عدد ۳، داریم:

$$12 | ab \xrightarrow{\times 3} 36 | 3ab$$

برای نمونه: می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عدد ۶۷۸۹۱۴۳۲۵ مربع کامل است یا نه؟ برای این منظور عدد فرد داده شده را بر عدد ۸ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$۶۷۸۹۱۴۳۲۵ = ۶۷۸۹۱۴۰۰۰ + ۳۲۵ = ۶۷۸۹۱۴ \times ۱۰۰۰ + ۳۲۵$$

توجه کنید عدد ۱۰۰۰ مضرب ۸ است (زیرا $۱۰۰۰ = ۸ \times ۱۲۵$)، پس عدد ۶۷۸۹۱۴×۱۰۰۰ نیز مضرب ۸ است. بنابراین کافی است باقی‌مانده تقسیم عدد ۳۲۵ بر عدد ۸ را ببینیم. واضح است که $۳۲۵ = ۸(۴۰) + ۵ = ۸k'' + ۵$ لذا:

$$۶۷۸۹۱۴۳۲۵ = ۸k' + ۸k'' + ۵ = ۸(k' + k'') + ۵ = ۸q + ۵$$

$$q \in \mathbb{Z}$$

یعنی عدد ۶۷۸۹۱۴۳۲۵ به صورت $۸q + ۱$ نیست و در نتیجه مربع کامل نیست.

راهنما: باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر عدد ۸، با باقی‌مانده تقسیم سه رقم سمت راست آن عدد بر ۸ برابر است.

بنابراین در مثال بالا، برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عدد ۶۷۸۹۱۴۳۲۵ بر عدد ۸، همان باقی‌مانده تقسیم عدد ۳۲۵ بر ۸ را می‌یابیم.

هشدار: اگر یک عدد صحیح و فرد به صورت $۸q + ۱$ باشد، در مورد مربع کامل بودن یا نبودن آن چیزی نمی‌توان گفت.

$$a = \text{فرد} \Rightarrow ۲a \neq \text{مربع}$$

۱۰ دو برابر یک عدد صحیح فرد، مربع کامل نیست. به عبارت دیگر:

برای اثبات، از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم (فرض خلف) عدد $۲a$ مربع کامل است و $۲a = n^2$ ، به طوری که $n \in \mathbb{Z}$. اما از آنجایی که $۲a$ یک

عدد زوج می‌باشد، پس n^2 و در نتیجه n زوج است لذا $n = ۲k$ ، که $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین:

$$n = ۲k \Rightarrow n^2 = ۴k^2 \xrightarrow{۲a=n^2} ۲a = ۴k^2 \xrightarrow{\div ۲} a = ۲k^2$$

یعنی a عددی زوج به دست آمد، که با فرض فرد بودن a در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و در صورت فرد بودن a ، $۲a$ مربع کامل نیست.

نتیجه: اگر خارج قسمت تقسیم یک عدد صحیح زوج بر عدد ۲، عددی فرد باشد، آن‌گاه آن عدد زوج مربع کامل نیست (اگر خارج قسمت این تقسیم عددی زوج باشد، در مورد مربع بودن یا نبودن آن عدد زوج، چیزی نمی‌توان گفت).

برای نمونه: می‌خواهیم بررسی کنیم که عدد ۲۷۵۸۲۱۴۶ مربع کامل است یا نه؟ از آنجایی که این عدد زوج است، لذا خارج قسمت تقسیم آن را بر عدد ۲ بررسی می‌کنیم. واضح است که:

$$۲۷۵۸۲۱۴۶ = ۲ \times ۱۳۷۹۱۰۷۳ = ۲ \times (\text{فرد})$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این عدد زوج در تقسیم بر عدد ۲، خارج قسمت فرد دارد. به عبارت دیگر این عدد زوج، با دو برابر یک عدد فرد برابر است لذا مربع کامل نیست.

یادآوری: هیچ مربع کاملی به تعدادی فرد رقم صفر ختم نمی‌شود.

برای نمونه: عدد ۴۷۹۶۴۲۵۰۰۰ مربع کامل نیست زیرا $۴۷۹۶۴۲۵ \times ۱۰^۳ = ۴۷۹۶۴۲۵۰۰۰$ ، واضح است که با وجود توان فرد، عدد مذکور مربع کامل نیست.

هشدار: عددی که به تعدادی زوج رقم صفر ختم می‌گردد، ممکن است مربع کامل باشد یا نباشد.

برای نمونه: عدد ۱۰۰ مربع کامل است، اما عدد ۲۰۰ مربع کامل نیست.

۲ هیچ مربع کاملی به ارقام ۸۰۷۰۳۰۲ ختم نمی‌گردد.

برای نمونه: اعداد ۱۸۹۴۳۷۹۲ ، ۸۲۶۷۹۷۳ ، ۱۷۴۸۱۹۳۴۷ و ۱۷۹۶۴۸۹۶۸ مربع کامل نیستند، زیرا به ۸۰۷۰۳۰۲ ختم شده‌اند.

دلیل درستی یادآوری ۲، این است که رقم یکان عدد طبیعی a^2 همان رقم یکان مربع رقم یکان a است.

برای نمونه: اگر رقم یکان عدد طبیعی a برابر ۹ است، رقم یکان a^2 برابر با رقم یکان ۹^2 ، یعنی برابر ۱ است. به طور کلی به جدول مقابل دقت کنید:

رقم یکان a	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
رقم یکان a^2	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، رقم یکان a^2 ، نمی‌تواند ۸۰۷۰۳۰۲ باشد).

۳ هیچ مربع کاملی به صورت $۳k + ۲$ نیست ($k \in \mathbb{Z}$).

زیرا می‌دانیم هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳، به صورت $۳k$ یا $۳k \pm ۱$ است. پس اگر $a \in \mathbb{Z}$ عددی دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$a = ۳k \Rightarrow a^2 = ۹k^2 \quad , \quad a = ۳k \pm ۱ \Rightarrow a^2 = ۹k^2 \pm ۶k + ۱ = ۳(\frac{۹k^2 \pm ۲k}{۳}) + ۱ = ۳k' + ۱$$

واضح است که a^2 به صورت $۹k^2$ یا $۳k' + ۱$ است و هیچ‌گاه به شکل $۳k + ۲$ قابل نمایش نیست.

برای نمونه: برای بررسی مربع کامل بودن یا نبودن عدد ۱۲۷۹۲۴۱ ، از آنجایی که این عدد فرد است، ابتدا بررسی می‌کنیم که به صورت $۸q + ۱$ هست یا نه همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فقط سه رقم سمت راست این عدد را بر عدد ۸ تقسیم می‌کنیم و چون $۲۴۱ = ۸(۳۰) + ۱$ ، پس این عدد به صورت $۸q + ۱$ است و در مورد مربع کامل بودن یا نبودن آن چیزی نمی‌توان گفت، اما با توجه به اینکه مجموع ارقام این عدد برابر ۲۶ است و $۲۶ = ۳k + ۲$ ، پس این عدد به صورت $۳k + ۲$ است و در نتیجه مربع کامل نیست.

راهنما: برای یافتن باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۳ یا ۹، باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد طبیعی را بر ۳ یا ۹ می‌یابیم.

نتیجه: اگر یک عدد طبیعی و مربع، مضرب ۲ باشد، آن‌گاه مضرب ۹ نیز هست.

به عبارت دیگر اگر یک عدد طبیعی، مضرب ۳ باشد و مضرب ۹ نباشد، آن‌گاه مربع کامل نیست.

برای نمونه: عدد ۲۹۳۴۶۱۵۹ مضرب ۳ است (زیرا مجموع ارقام این عدد ۳۹ می‌باشد، که بر ۳ بخش پذیر است) اما مضرب ۹ نیست (چرا؟) لذا مربع نیست.

۱۲۱. گزینه ۱ بررسی گزینه‌ها:

$$\text{گزینه ۱: } x^2 + 2 > 2x \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 + 1}{\text{اتحاد}} > 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 > 0$$

چون عبارت به دست آمده، همواره درست است، پس ارزش این گزاره سوری درست است.

$$\text{گزینه ۲: } \frac{x-1}{x} = x \Rightarrow x-1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

این معادله درجه دوم جواب حقیقی ندارد. پس مجموعه جواب گزاره‌نمای این سور وجودی همواره تهی است.

گزینه ۳: از آن جایی که می‌دانیم $|x + \frac{1}{x}| > 2$ ، پس $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، سور وجودی داده شده نادرست است.

گزینه ۴: به ازای $x = 2$ مثال نقض وجود دارد، پس نادرست است.

۱۲۲. گزینه ۳

در مجموعه A چون $x \leq 2$ و $x \in \mathbb{N}$ پس $x = 1, 2$ خواهد بود.

$$x = 1 \Rightarrow \frac{2^x \times x^2}{x} = \frac{2 \times 1}{1} = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{2^x \times x^2}{x} = \frac{2^2 \times 2^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

پس $A = \{2, 8\}$.

۱۲۳. گزینه ۱ از اینکه $\{1\} \subset A$ ، نتیجه می‌گیریم $1 \in A$ ، که غلط است، زیرا مجموعه A دارای عضو ۱ نیست.

۱۲۴. گزینه ۳ با توجه به گزینه‌ها، به راحتی دیده می‌شود که یکی از دو گزینه ۲ و ۳ جواب خواهند بود. از طرفی چون $\{a\} \in C$ پس $A \in C$.

۱۲۵. گزینه ۲

۱۲۶. گزینه ۳ ابتدا هر یک از مجموعه‌های A, B, C و D را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم:

$$A = \{m | m \in \mathbb{Z}, |m| < 2\} \Rightarrow A = \{m | m \in \mathbb{Z}, -2 < m < 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{m | m \in \mathbb{Z}, m^2 = m\} \Rightarrow B = \{m | m \in \mathbb{Z}, m^2 - m = 0\} \\ \Rightarrow B = \{m | m \in \mathbb{Z}, m(m-1) = 0\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{m | m \in \mathbb{Z}, m^2 \leq 2m\} \\ \Rightarrow C = \{m | m \in \mathbb{Z}, m^2 - 2m \leq 0\} = \{0, 1, 2\}$$

$$D = \{m | m \in \mathbb{Z}, m^2 \leq 1\} \\ \Rightarrow D = \{m | m \in \mathbb{Z}, -1 \leq m \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = E, A = B = D$$

بنابراین می‌توان نوشت:

۱۲۷. گزینه ۲

$$\frac{2^{n+5}}{2^n} = 2^5 = 32$$

۱۲۸. گزینه ۲ عضو a حضور دارد، پس ۲ عضو باقی مانده، دارای $2^2 = 8$ زیرمجموعه‌اند.

۱۲۹. گزینه ۴ چون $A - \{B\} = \{a, b, \{a\}\}$ ، پس یک مجموعه ۳ عضوی دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه است، که غیر از مجموعه تهی، ۷ زیرمجموعه غیر تهی دارد.

۱۳۰. گزینه ۲ عضو b کنار می‌رود و چون عضو a همواره حضور دارد، لذا تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه $\{c, d, e\}$ را می‌یابیم که برابر با $2^3 = 8$ است.

۱۳۱. گزینه ۲

$$2^{n+2} = 2^n + 96 \Rightarrow 2^2 \times 2^n - 2^n = 96 \Rightarrow 2^n(2^2 - 1) = 96$$

$$\Rightarrow 2^n \times 3 = 96 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

۱۱۳. گزینه ۲ گزاره «بعضی از انسان‌ها با هوش‌اند»، به صورت $\exists x \in H; I(x)$ در می‌آید، که نقیض آن عبارت است از:

$$\forall x \in H; \sim I(x)$$

۱۱۴. گزینه ۳ نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ عبارت است از $p \wedge \sim q$ ، پس نقیض گزاره شرطی داده شده عبارت است از:

$$(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \wedge \sim (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0)$$

$$\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0)$$

۱۱۵. گزینه ۴ گزاره‌های «شرایط اقتصادی جامعه بد باشد»، «مردم فقیر می‌شوند» و «همه کارها ناتمام می‌مانند» را به ترتیب p, q, r می‌نامیم.

در این صورت نقیض گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ موردنظر است، که عبارت است از $p \wedge \sim (q \vee r) \equiv p \wedge \sim q \wedge \sim r$.

توجه کنید که نقیض گزاره «همه کارها ناتمام می‌مانند»، عبارت است از «برخی کارها ناتمام نمی‌مانند».

۱۱۶. گزینه ۴

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N} \exists a \in \mathbb{R}; 2 < (1+a)^n \leq 25)$$

$$\equiv \exists n \in \mathbb{N} \forall a \in \mathbb{R}; \sim (2 < (1+a)^n \leq 25)$$

$$\equiv \exists n \in \mathbb{N} \forall a \in \mathbb{R}; \sim ((1+a)^n > 4 \wedge (1+a)^n \leq 25)$$

$$\equiv \exists n \in \mathbb{N} \forall a \in \mathbb{R}; \sim ((1+a)^n > 4) \vee \sim ((1+a)^n \leq 25)$$

$$\equiv \exists n \in \mathbb{N} \forall a \in \mathbb{R}; ((1+a)^n \leq 4 \vee (1+a)^n > 25)$$

۱۱۷. گزینه ۱ زیرا ارزش گزاره $x^2 = 16$ ، درست و ارزش گزاره $\forall x \in \mathbb{N}; x^2 > 1$ نادرست است (زیرا مثال نقض $x = 1$ دارد)، پس

این گزاره شرطی نادرست است (توجه کنید گزاره‌های موجود در گزینه‌های ۲ و ۳، به انتغای مقدم درست‌اند).

۱۱۸. گزینه ۲

$$\sim [(\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b) \Rightarrow (\exists a, b \in \mathbb{Z}; a^2 > b^2)]$$

$$\equiv (\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b) \wedge \sim (\exists a, b \in \mathbb{Z}; a^2 > b^2)$$

$$\equiv (\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b) \wedge (\forall a, b \in \mathbb{Z}; a^2 \leq b^2)$$

۱۱۹. گزینه ۴

ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که گزاره‌های p و q هم‌ارز باشند. به بیان دیگر گزاره‌های p و q هر دو درست یا هر دو

نادرست باشند. معادله $2^x + 1 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی فاقد جواب بوده و نادرست است. بنابراین زمانی این گزاره‌نما درست خواهد بود که معادله $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب نداشته باشد. به بیان دیگر این تساوی نادرست باشد، بنابراین ابتدا باید ریشه‌های این معادله را به دست آوریم. داریم:

$$2^x = a \Rightarrow 2^{2x} - 6(2^x) + 8 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

برای اینکه معادله موردنظر فاقد جواب باشد، باید $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ باشد تا گزاره‌نمای دو شرطی، تبدیل به گزاره‌ای درست شود.

۱۲۰. گزینه ۱ در گزینه ۱ داریم:

به ازای هر x طبیعی، یک

$$y = x + 6 \Rightarrow \text{مقدار طبیعی برای } y \text{ به دست می‌آید.}$$

در سایر گزینه‌ها مثال نقض وجود دارد.

۱۴۶. **گزینه ۱** با توجه به خاصیت جذب داریم:

$$A' \cap [(B \cap A) \cup B] = A' \cap B$$

۱۴۷. **گزینه ۴** چون $k > n$ پس $\{1, 2, \dots, k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ و در نتیجه به ازای هیچ مجموعه دلخواه X ، تساوی $\{1, 2, \dots, k\} \cup X = \{1, 2, \dots, n\}$ برقرار نخواهد بود.

۱۴۸. **گزینه ۲** چون $\{1, 2, \dots, n\} \cup X = \{1, 2, \dots, n\}$ پس باید X یکی از زیر مجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. بنابراین 2^n حالت وجود دارد.

۱۴۹. **گزینه ۲** چون $k < n$ پس برای اینکه تساوی موردنظر برابر باشد، باید مجموعه X شامل $\{k+1, \dots, n\}$ باشند. از طرفی این مجموعه می‌تواند هریک از اعداد $\{1, \dots, k\}$ را نیز در بر بگیرد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, \dots, k\}$ ، جواب مسئله خواهد بود، زیرا در هریک از این زیر مجموعه‌ها می‌توان $\{k+1, \dots, n\}$ را قرار داد و در نتیجه مجموعه حاصل، $\{k+1, \dots, n\}$ را در برداشته و می‌توانیم از آن به جای X در تساوی استفاده کنیم. از طرفی تعداد زیر مجموعه‌های $\{1, \dots, k\}$ برابر با 2^k است.

۱۵۰. **گزینه ۳** واضح است که $A_8 = \{8, 9, \dots, 17\}$ و در نتیجه داریم:

$$A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_8 = \{3, 4, \dots, 12\} \cap \{4, 5, \dots, 13\} \cap \dots \cap \{8, 9, \dots, 17\} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$$

۱۵۱. **گزینه ۳** با قرار دادن $n = 1, 2, 3, 4$ داریم:

$$A_1 = (-1, 2), A_2 = (2, 4), A_3 = (-2, 6), A_4 = (4, 8)$$

در نتیجه $\bigcup_{n=1}^4 A_n = (-2, 8)$ ، که اعداد صحیح متعلق به آن عبارت‌اند از:

$$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

۱۵۲. **گزینه ۱**

$$A_4 = \left(-\frac{2}{4}, \frac{4-2}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$A_5 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{5-2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$A_7 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{7-2}{7}\right) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

$$A_8 = \left(-\frac{2}{8}, \frac{8-2}{8}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

واضح است که بزرگ‌ترین عدد در بین اولی‌ها، $-\frac{1}{4}$ و کوچک‌ترین عدد

در بین دومی‌ها $\frac{1}{4}$ است. پس $\bigcap_{n=4}^8 A_n = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

۱۵۳. **گزینه ۴** واضح است که $A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ و $A_6 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ داریم:

$$= \frac{\left[\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right] - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

۱۵۴. **گزینه ۳**

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, 2^m \leq 2(1)\} = \{0, 1\}$$

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, 2^m \leq 2(4)\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A_8 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -8, 2^m \leq 2(8)\} = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

۱۳۲. **گزینه ۱** فرض می‌کنیم A دارای n عضو باشد، بنابراین دارای 2^n زیر مجموعه است. از طرفی با حذف ۲ عضو از این n عضو، مجموعه A دارای 2^{n-2} زیرمجموعه خواهد بود، پس:

$$2^{n-2} = 2^n - 284 \xrightarrow{\text{تست گزینه‌ها}} n = 9$$

۱۳۳. **گزینه ۱**

$$2^n = 62 + \frac{1}{4} \times 2^{n-2} \xrightarrow{\text{تست گزینه‌ها}} n = 6$$

۱۳۴. **گزینه ۱** توجه کنید که مجموعه داده‌شده یک مجموعه ۳ عضوی است، زیرا $\{a, b\} = \{b, a\}$ و مجموعه، عضو تکراری ندارد.

$$\{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$$

پس با حذف عضو $\{a, b\}$ ، ۲ عضو دیگر می‌ماند:

$$\{a, b, \{a, b\}\} \xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}} 2^2 = 4$$

۱۳۵. **گزینه ۳**

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

پس $B = \{1, 2\}$. بنابراین $A - B$ دارای ۳ عضو است.

$$A - B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$$

در نتیجه $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد که به جز تهی، تعداد ۷ زیرمجموعه ناتهی باقی می‌ماند.

۱۳۶. **گزینه ۴** با توجه به مجموعه‌های داده شده داریم:

$$A - B = \{1, 2, \{1, 2, 2\}\} - \{1, 2, 2, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2, 2\}\} = \{C\}$$

$$B - C = \{1, 2, 2, \{1, 2\}\} - \{\{1, 2, 2\}\} = \{1, 2\} \neq \emptyset$$

۱۳۷. **گزینه ۲** زیرا خود A در C دیده نمی‌شود.

۱۳۸. **گزینه ۱** زیرا $2 \in B$ و $2 \notin C$ ، پس $B \not\subset C$.

۱۳۹. **گزینه ۴**

۱۴۰. **گزینه ۲**

$$\begin{cases} A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \\ A \subset C \Rightarrow A \cup C = C \end{cases} \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = B \cap C = B$$

(زیرا $B \subset C$)

۱۴۱. **گزینه ۳**

$$\begin{cases} B \cap C = C \Rightarrow C \subset B \\ A \cap B = B \Rightarrow B \subset A \end{cases} \Rightarrow C \subset B \subset A$$

۱۴۲. **گزینه ۲**

چون $(A \cup B) \subset \emptyset$ و $\emptyset \subset (A \cup B)$ ، پس $A \cup B = \emptyset$ لذا $A = B = \emptyset$.

۱۴۳. **گزینه ۳** چون با اضافه کردن یک عضو از A به B ، تعداد اعضای B تغییری نکرده است پس این عضو در داخل B هم بوده است. یعنی:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

۱۴۴. **گزینه ۲** چون با اضافه شدن ۱۰ عضو به مجموعه A ، به اشتراک آن‌ها، ۹ عضو اضافه شده است، پس فقط یک عضو از این ۱۰ عضو در B نبوده است. در نتیجه به $A \cup B$ ، فقط یک عضو اضافه خواهد شد و در نتیجه دارای ۲۶ عضو خواهد بود.

۱۴۵. **گزینه ۳** چون $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $A \cap B = \{2, 3, 4\}$ پس:

$$\{2, 3, 4\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

یعنی X حتماً شامل عضوهای ۲ و ۳ و ۴ است. لذا X می‌تواند یکی از $\{2, 3, 4\}$ ، $\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{2, 3, 4, 5\}$ ، $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد:

$(۳,۵,۶), (۴,۱,۶), (۴,۲,۶), (۴,۳,۶), (۴,۴,۶), (۴,۵,۶), (۵,۱,۶),$
 $(۵,۲,۶), (۵,۳,۶), (۵,۴,۶), (۵,۵,۶)$

«تاس تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید» یعنی دو بار اول ۶ و بار سوم غیر ۶ یا دو بار اول و سوم ۶ و بار دوم غیر ۶ یا دو بار اول غیر ۶ و بار دوم و سوم ۶ و بار اول غیر ۶ ظاهر شده است. بنابراین:

$B = \{(۶,۶,۱), (۶,۶,۲), (۶,۶,۳), (۶,۶,۴), (۶,۶,۵), (۶,۱,۶),$
 $(۶,۲,۶), (۶,۳,۶), (۶,۴,۶), (۶,۵,۶), (۱,۶,۶), (۲,۶,۶),$
 $(۳,۶,۶), (۴,۶,۶), (۵,۶,۶)\}$

واضح است که $A \cap B = \emptyset$ پس دو پیشامد A و B ناسازگارند.
 از آنجایی که $A \cap B = \emptyset$ پس $A - B = A$ و $B - A = B$ ، لذا دو پیشامد A و B' و نیز دو پیشامد A' و B سازگارند (چرا؟).

۲۷۴. گزینه ۳ قضای نمونه‌ای شامل ارقام ۱, ۲, ..., ۹ است و پیشامد مطلوب شامل ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹ است. پس احتمال موردنظر $\frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

۲۷۵. گزینه ۴ واضح است که $n(S) = \binom{۱۰}{۱} = ۱۰$ حالت‌های مطلوب

۱۱, ۱۳, ۱۷ و ۱۹ است لذا احتمال موردنظر $\frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$ است. $\binom{۶}{۳} = \frac{۱}{۶}$

۲۷۶. گزینه ۲ احتمال موردنظر عبارت است از: $\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۱}{۶}$

۲۷۷. گزینه ۲ می‌دانیم $n(S) = \binom{۵}{۲} = ۱۰$ اما دو رأس مجاور، یعنی دو رأسی که توسط یک ضلع به هم وصل شده باشند، پس اگر یک ضلع از ۵ ضلع را انتخاب کنیم، همانند آن است که دو رأس مجاور انتخاب شده

است. $n(A) = \binom{۵}{۱} = ۵$ لذا احتمال مطلوب $\frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$ است.

۲۷۸. گزینه ۴ شش زوج یعنی ۱۲ نفر لذا $n(S) = \binom{۱۲}{۲} = ۶۶$ اگر پیشامد

مطلوب را A بنامیم، $n(A) = \binom{۶}{۱} = ۶$ پس $P(A) = \frac{۶}{۶۶} = \frac{۱}{۱۱}$

۲۷۹. گزینه ۳ می‌دانیم $n(S) = \binom{۵}{۲} = ۱۰$ از طرفی حالت‌های مطلوب $\{۱,۵\}, \{۲,۵\}, \{۳,۵\}, \{۴,۵\}, \{۲,۴\}$ و $\{۳,۴\}$ است، پس جواب $۵/۶$ می‌باشد.

۲۸۰. گزینه ۱ واضح است که $n(S) = \binom{۶}{۲} = ۱۵$ پیشامد مطلوب عبارت است از $A = \{\{۱,۲\}, \{۲,۳\}, \{۳,۴\}, \{۴,۵\}, \{۵,۶\}\}$ پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

توجه کنید چون دو مهره را با هم خارج می‌کنیم، ترتیب مهم نیست و پیشامد مطلوب را با مجموعه‌های ۲ عضوی تشکیل می‌دهیم.

۲۸۱. گزینه ۲ واضح است که $n(S) = \binom{۵}{۱} \binom{۴}{۱} = ۲۰$ اکنون پیشامد مطلوب

را تشکیل می‌دهیم. چون ترتیب مهم است، از زوج مرتب استفاده می‌کنیم:
 $A = \{(۱,۲), (۲,۱), (۲,۳), (۳,۲), (۳,۴), (۴,۳), (۴,۵), (۵,۴)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵}$$

۲۶۸. گزینه ۱

$$(A - B) - C = A - (B - C) \Rightarrow (A \cap B') \cap C' = A \cap (B \cap C)'$$

$$\Rightarrow (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cup C)$$

$$\Rightarrow C' \cap (A \cap B') = (A \cap B') \cup (A \cap C)$$

اکنون دو طرف را با $(A \cap C)$ اشتراک می‌گیریم:

$$(A \cap C) \cap [C' \cap (A \cap B')] = (A \cap C) \cap [(A \cap B') \cup (A \cap C)]$$

$$\xrightarrow{\text{جذب}} \underbrace{[(A \cap C) \cap C']}_{\emptyset} \cap (A \cap B') = A \cap C$$

۲۶۹. گزینه ۴

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲y = ۵۱۲ = ۲^9 \\ ۳x + y = ۸۱ = ۳^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲y = ۹ \\ ۳x + y = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} (x = \frac{۱۷}{۷}) \wedge (y = \frac{-۶}{۷})$$

$$\Rightarrow ۵x + ۴y = ۵(\frac{۱۷}{۷}) + ۴(\frac{-۶}{۷}) = \frac{۶۱}{۷}$$

۲۷۰. گزینه ۲

واضح است که $A \cap B = \emptyset$ پس $(A \cap B) \times A = \emptyset \times A = \emptyset$ صفر عضو دارد.

۲۷۱. گزینه ۴

نکته:

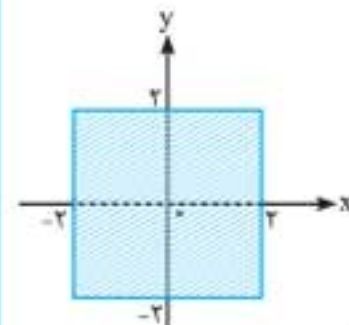
$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = ۲n(A)n(B) - [n(A \cap B)]^2$$

می‌دانیم: $A \cap B = \{۳, ۴\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۲$

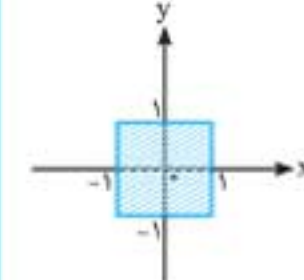
$$\text{پس: } n[(A \times B) \cup (B \times A)] = ۲ \times ۴ \times ۳ - ۲^2 = ۲۴ - ۴ = ۲۰$$

۲۷۲. گزینه ۴ نمودار مختصاتی A^2

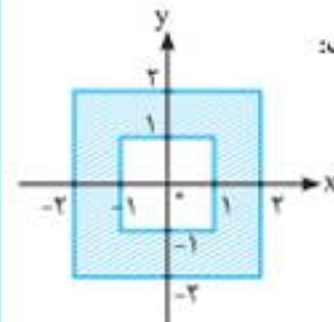
به صورت مقابل است:



نمودار مختصاتی B^2 به صورت زیر خواهد بود:



در نتیجه نمودار $A^2 - B^2$ به صورت مقابل است:



۲۷۳. گزینه ۱ «تاس برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید» یعنی دو بار

اول غیر ۶ ظاهر شده است و فقط در بار سوم آمده است. پس:

$A = \{(۱,۱,۶), (۱,۲,۶), (۱,۳,۶), (۱,۴,۶), (۱,۵,۶), (۲,۱,۶), (۲,۲,۶),$
 $(۲,۳,۶), (۲,۴,۶), (۲,۵,۶), (۳,۱,۶), (۳,۲,۶), (۳,۳,۶), (۳,۴,۶),$

۷۸۲. گزینه ۴ با توجه به فرض $\mu = 90, \sigma = 1/2, n = 64$ می‌دانیم

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

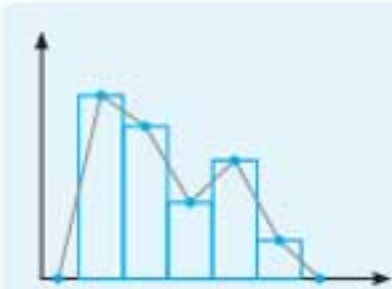
بنابراین:

$$\bar{x} - \frac{2 \times 1/2}{\sqrt{64}} \leq 90 \leq \bar{x} + \frac{2 \times 1/2}{\sqrt{64}} \Rightarrow \bar{x} - 0.125 \leq 90 \leq \bar{x} + 0.125$$

$$\Rightarrow 89.875 \leq \bar{x} \leq 90.125$$

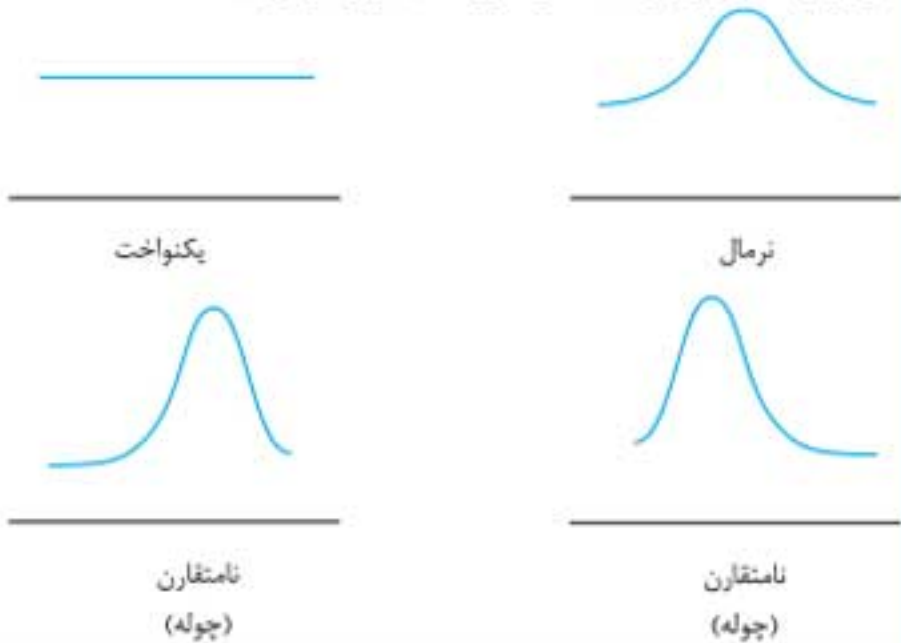
بنابراین احتمال اینکه $\bar{x} < 82$ شود، تقریباً برابر صفر است.

۷۸۳. گزینه ۳



راهنما: برای رسم نمودار چندبر فراوانی از روی نمودار بافت نگاهت، وسط ضلع بالایی مستطیل‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف نمودار را به محور X ها وصل می‌کنیم.

اگر حجم نمونه را زیاد کنیم، معمولاً طول دسته‌ها را کوچک‌تر می‌کنیم. نمودار چندبر فراوانی به یک از صورت‌های زیر در می‌آید:



راهنما: اگر حجم نمونه زیاد باشد ($n \geq 30$) بدون توجه به نمودار چندبر فراوانی جامعه، نمودار چندبر فراوانی بافت نگاهت برآوردهای میانگین به‌صورت نرمال است.

۷۸۴. گزینه ۴ خطای برآورد بازه‌ای برابر $|\mu - \bar{x}|$ است، که حداکثر

مقدار آن برابر $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\text{حداکثر خطا} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{625\sigma^2}} = \frac{2\sigma}{25\sigma} = \frac{2}{25} = 0.08 = 8\%$$

۷۸۵. گزینه ۱ با توجه به بازه اطمینان ۹۵٪ داریم:

$$\begin{cases} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 40 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 60 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \bar{x} = 50, \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 10$$

با توجه به فرض مسئله $n = 16$ است و داریم: $\frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 5 \Rightarrow \sigma = 20$

واریانس جامعه ۴ برابر واریانس نمونه است، یعنی:

$$\sigma^2 = 4\sigma_{\bar{x}}^2 \Rightarrow \sigma = 2\sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

حال با داشتن میانگین نمونه (\bar{x}) و انحراف معیار نمونه ($\sigma_{\bar{x}}$)، ضریب

تغییرات آن‌ها را به دست می‌آوریم: $C.V = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2$

از طرفی مرکز بازه اطمینان، میانگین نمونه را نشان دهد: پس:

$$\bar{x} = \frac{107/6 + 102/4}{2} = 105$$

بنابراین جواب برابر است با: $\bar{x} + \sigma = 105 + 15/6 = 120/6$

۷۷۶. گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله، بازه اطمینان ۹۵ درصدی میانگین

نمرات برابر $[40, 60]$ است. با توجه به حجم نمونه که ۴۰۰ است داریم:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{400}} = 40 \Rightarrow \bar{x} - \frac{\sigma}{10} = 40 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{400}} = 60 \Rightarrow \bar{x} + \frac{\sigma}{10} = 60 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$$

$$\bar{x} = 50, \sigma = 100 \Rightarrow \sigma - \bar{x} = 100 - 50 = 50$$

۷۷۷. گزینه ۴ برآورد بازه‌ای میانگین جامعه با اطمینان بیشتر از ۹۵٪

به صورت $[\bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}}]$ است، که در آن $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ابتدا

انحراف معیار جامعه را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{64}{n} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{64}{n}}$$

اکنون انحراف معیار نمونه را می‌یابیم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{64}{n}}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{64}{100n}} = \frac{8}{100} = 0.08$$

پس برای میانگین جامعه داریم:

$$4 - 2 \times (0.08) \leq \mu \leq 4 + 2 \times (0.08) \Rightarrow 3.84 \leq \mu \leq 4.16$$

۷۷۸. گزینه ۴ زمانی میانگین همه نمونه‌های ۱۸ تایی با هم برابر است،

که حجم نمونه و جامعه یکی باشد، پس در واقع جامعه ما ۱۸ عضوی بوده و فقط یک نمونه ۱۸ عضوی وجود دارد. در نتیجه میانگین جامعه برابر میانگین نمونه ۱۸ تایی و دقیقاً $5/2$ است.

۷۷۹. گزینه ۴ با توجه به سؤال، میانگین دندان‌های کشیده، پوسیده و

پر شده برابر $\bar{x} = 3$ است. اندازه نمونه $n = 400$ است. مقادیر انحراف معیار را نیز داریم. کران بالای بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برابر است با:

$$\text{کران بالا} = \bar{x} + \frac{2\sigma_1}{\sqrt{n}} = 3 + \frac{2 \times 1}{\sqrt{400}} = 3.1$$

\Rightarrow دندان‌های کشیده

$$\text{کران بالا} = \bar{x} + \frac{2\sigma_2}{\sqrt{n}} = 3 + \frac{2 \times 2}{\sqrt{400}} = 3.2$$

\Rightarrow دندان‌های پوسیده

$$\text{کران بالا} = \bar{x} + \frac{2\sigma_3}{\sqrt{n}} = 3 + \frac{2 \times 1/6}{\sqrt{400}} = 3.16$$

\Rightarrow دندان‌های پر شده

۷۸۰. گزینه ۲ می‌دانیم بازه اطمینان بیشتر از ۹۵ درصد را می‌توانیم به صورت

$$|\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

می‌گوئیم. با توجه به صورت سؤال $\sigma^2 = 9$ ، $|\mu - \bar{x}| \leq 0.25$ است، داریم:

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 0.25 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \frac{2 \times 3}{\sqrt{n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{n} = 24 \Rightarrow n = 576$$

۷۸۱. گزینه ۴ طول بازه اطمینان میانگین با اطمینان بیش از ۹۵٪

برابر $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. می‌دانیم $\sigma^2 = \frac{36}{25}$ در نتیجه $\sigma = \frac{6}{5}$ داریم:

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.05 \Rightarrow \frac{4 \times \frac{6}{5}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{20 \times 24}{5} \leq \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 96 \leq \sqrt{n} \Rightarrow 9126 \leq n$$